

## 段付はりおよび板の振動に関する研究

著者	佐藤 秀紀
号	545
発行年	1981
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10097/11494">http://hdl.handle.net/10097/11494</a>

氏 名	佐 藤 秀 紀
授 与 学 位	工 学 博 士
学位授与年月日	昭和 56 年 4 月 8 日
学位授与の根拠法規	学位規則第 5 条第 2 項
最 終 学 歴	昭和 41 年 3 月 東北大学大学院工学研究科 機械工学専攻修士課程修了
学 位 論 文 題 目	段付はりおよび板の振動に関する研究
論 文 審 査 委 員	東北大学教授 斎藤 秀雄    東北大学教授 阿部 博之 東北大学教授 渥美 光    東北大学教授 八巻 昇

## 論 文 内 容 要 旨

### 第 1 章 序 論

機械あるいは構造物の基本的な要素として多用されるはりの振動に関しては古くから多くの研究が行われてきた。しかし、その大部分が均一断面はりあるいは断面が長さ方向に徐々に変化する漸変断面はりについてである。段付はりのように断面が急変する急変断面はりに関しては、工業上よく用いられる形状であるにもかかわらず、数式を用いた解析が複雑になることもあって比較的研究例が少ない。とくに、はり形状の振動特性に及ぼす影響についての解析的および実験的研究はごくわずかであり、しかも線形振動に限られている。しかし、急変断面はりでは曲げ剛性および質量分布が急変するため、急変部の形状や境界条件などによってかなり自由振動特性が異なることが考えられる。また、断面急変部における局部変形などもあって、単純に通常のはり理論を適用することが困難な場合も起る。すなわち、急変断面はりの場合は均一断面はりや漸変断面はりの場合とは本質的に異なった振動特性や振動問題が存在する。しかもこれらの問題の解明にあたっては、これまで均一断面はりや漸変断面はりの解析で用いられてきた手法が必ずしも有効には適用できないことが予想される。

これらのことから、本研究は主として段付はりにおける断面急変部の形状が自由振動に及ぼす影響を、線形系および非線形系について、マトリックス法を中心としたそれぞれ独自の解析手法を用いて解明することを目的としたものである。

## 第2章 二段段付片持はりの自由振動

本章においては、二段段付片持はりの自由振動を、回転慣性およびせん断変形の影響を考慮したチモシェンコはり理論に基づき、断面急変部で変位、内力の連続条件を用いて解析し、振動数方程式およびモード関数を導いた。さらに、具体例として、長方形断面をもち、厚さ一定で幅比が変化する場合、および幅一定で厚さ比が変化する場合の段付はりについて数値計算ならびに実験を行い、はり形状の固有振動数に及ぼす影響を明らかにした。厚さ比の変化は幅比の変化に比べて固有振動数に強い影響を与えるが、形状、次数によってその程度にはかなり相異がみられる。実験値は計算値と全般的にはよく一致した。しかし、厚さ一定で幅比が変化する場合には、高次になるほど、また幅比が1より離れて段形状が極端になるほど、実験値は計算値よりやや低く表われ、断面急変部におけるはり理論の連続条件の仮定が実際には満足されにくくなるのが一因と思われる結果を示した。また幅一定で厚さ比が変化する場合は、モード形によって固定端に生ずる反力がかなり異なるため、固定端側の段が主に振動するモード形では固定条件の不備が大きく影響し、実験値がかなり低くなる場合があることがわかった。なお、回転慣性およびせん断変形を無視した場合についても計算した結果、本研究でとりあげた形状、次数ではそれらの影響は小さいことが明らかとなった。

## 第3章 溝付はりの自由振動

本章においては、厚さが急変することによる局部変形の影響により、通常のはり理論による解析が困難となる問題として、均一断面はりの一部に狭い溝をもつはりの自由振動を扱った。このような系では、断面が急変する部分で断面の大きい方に自由境界面が多くなるため、主に曲げモーメントによる局部変形が起り、実際の曲げ剛性は通常のはり理論による値より低下する。したがって、系全体に通常のはり理論を適用すると、固有振動数は実際より高く計算されることになる。これらの問題を解析的に解明するには、2次元あるいは3次元弾性変形を一般形状に対して扱える有限要素法が有効である。しかし、有限要素法による解析が必要であるのは断面急変部だけであり、その部分を除けば通常のはり理論が適用可能である。したがって、このような問題に対して系全体に有限要素法を適用することは、計算機使用上、記憶容量などにおいて無駄が多く、しかも支持ばねや集中質量などの集中定数系要素を取扱うのに不便である。そこで、本研究では、はり系の解析によく利用され、有限要素法よりは計算機使用上の取扱いが容易で記憶容量も少くてすむ、伝達マトリックス法を系全体としては適用する。ただし、局部変形などの複雑な解析を必要とする部分の伝達マトリックスは有限要素法を適用して計算することにする。このように、必要に応じて有限要素法と組合せて解析を行う、新しい形式の伝達マトリックス法を試みる。この手法により、両端自由の長方形断面はりの中央に、中立軸に対称な角型の両溝をもつはりの1次固有振動数を求め、溝形状の固有振動数に与える影響を明らかにするとともに、系全体にはり理論を適用した場合との比較を行った。この結果、はり理論のみによる固有振動数の計算値は形状によってはかなり値が異なることが明らかになった。また自由振動法による実験を行った結果、

実験値は計算値とよく一致し、本解法の妥当性を確認できた。さらに、断面急変部の効果を近似的に表わすモデルとして、2次元半無限弾性壁面支持の曲げ剛さをもつヒンジばねを考え、断面急変部にそれを付加した系については理論による解析を行った結果、定性的にはその効果を表わすことができた。

#### 第4章 段付長方形片持板の自由振動

この章では、段付はりの幅比が極端になる場合の断面急変部の影響を、板の振動として2次元の見方により検討することを目的として、段付長方形片持板の振動を取りあげた。板形状は第2章で扱った厚さ一定幅比が変化する二段段付はりに相当するものである。主に実験を行い、一有限要素法および理論による解析とも比較して、検討を行った。比較的低次の振動では、モード形ははり型曲げモードとはり型ねじりモードとに分けられる。はりの曲げ振動に対応するはり型曲げモードをもつ振動では、幅比がかなり極端な場合（実験例では10：1）でも通常のはり理論の適用がほぼ可能であることがわかった。段相互の中心線がずれた非対称形の場合であっても、はり型曲げモードの場合はその非対称性が固有振動数に与える影響は少い。これらのことから、幅の場合の断面急変部効果によるはり理論からの固有振動数のずれは、一般に比較的小さいと考えられる。

#### 第5章 段付はりの非線形自由振動

この章では、両端で軸方向移動を拘束された段付はりの大たわみによる非線形自由振動を取扱った。解析手法としては、より一般的な形状への適用を考慮して伝達マトリックス法を応用することを試みた。すなわち、はりのたわみによって生ずる軸力を受けるはりの運動方程式に対して、調和振動する変数分離形の解を仮定し、調和バランス法を適用することによって、はりのたわみ関数に関する常微分方程式を得る。ここで軸力を仮定すると、この方程式の解から、軸力を受けるはりの振動に関する伝達マトリックスを求めることができる。これを用いて、伝達マトリックス法により、系の固有振動数および注目している点の振幅を定めたたわみ関数を求める。求めたたわみ関数より軸力を計算し、再び固有振動数を求める手続きを繰り返す。このような繰り返しのことによって軸力が収束すれば、そのときの振動数を、注目している点の振幅を定めた非線形自由振動の振動数とみなす。具体的な計算例として、対称な二段段付長方形断面はりを取りあげ、両端単純支持および両端固定の場合について、段の長さ、厚さを変化させ、その形状が1次の自由振動特性に及ぼす影響を明らかにした。軸力を無視した線形モード関数を用いる従来のGalerkin法による解析では、はりのたわみによる軸方向のびが実際より大きく計算されることから、一般に非線形性を過大に評価しがちである。軸力を考慮したモード関数を用いる本解析法の結果によりこの問題を検討してみると、形状、境界条件にもよるが、段付はりの方向が均一断面はりよりも一般にその影響が大きいようである。計算結果の妥当性をみるために、両端固定はりの場合について、自由振動による実験を行って振幅・振動数特性を求め、実験値と計算値との比較を行ったところ、両者は比較的よい一致をみた。

## 第 6 章 重力を考慮した段付はりの非線形自由振動

段付はりでは断面の曲げ剛性、分布質量が長さ方向で急変することから、その非線形振動特性に及ぼす重力の影響が形状によってかなり異なることが考えられる。本章ではこれらの問題を明らかにするため、伝達マトリックス法を利用する手法を試みる。重力とたわみによる軸力とを受けるはりの運動方程式に対し、平均項と調和振動項とで解を仮定して調和バランス法を適用すると、それぞれの項のたわみ関数に関する連立常微分方程式を得る。ここで、平均項に対しては静的たわみ、振動項に対しては線形モード関数をそれぞれたわみ関数として最初仮定する。これによって、常微分方程式の係数は定数あるいは既知関数となるので各式は形式上独立に解き得る。求めたたわみ関数を用いて、それぞれの項に関する伝達マトリックスを求め、系に伝達マトリックス法を適用して固有振動数およびたわみ関数を求める。ただし、それぞれの項に関する伝達マトリックス関係は近似的に連立させて計算するものとする。求めたたわみ関数を用いて再び計算を行い、軸力に関する係数が収束するまで繰り返す。これによって注目している点の振幅を定めた自由振動の振動数が求まる。数値計算例として長方形断面をもつ両端単純支持および両端固定の対称二段段付はりをとりあげ、はりの全長、重量をある標準均一断面はりと等しく一定として形状を変化させた場合の、はり形状、中央点における集中質量などの自由振動特性に及ぼす影響を明らかにした。また均一断面はりについて、既に報告されている結果と比較して計算手法の妥当性を確認した。

## 第 7 章 結 論

本論文を要約し、結果をとりまとめたものである。

終りに、本論文作成に際しまして終始御懇切な御指導と御鞭撻を賜りました、東北大学教授齋藤秀雄先生に心から感謝の意を表します。また、有益な御助言を賜りました、東北大学教授渥美光先生、八巻昇先生、阿部博之先生、ならびに金沢大学教授小堀与一先生、柴原正雄先生に感謝の意を表します。

## 審 査 結 果 の 要 旨

機械構造物や各種機器には不連続的に断面の変化する各種弾性体、たとえば段付棒、はりあるいは板などがしばしば用いられる。これら構造物の振動挙動の研究は振動工学における基本的な課題の一つであり、その解明が急がれている。しかし、段付断面を有する各種弾性体の振動は、連続的に断面の変化する場合とは異なり、その取り扱いが繁雑となるため、近似解法によって固有振動数、振動モードを求めることが多く、その振動特性は未だ十分に明らかにされていない。著者はこれらに関する基礎的問題として、段付急変断面を有するはり、板の線形および非線形横振動を取り上げ、独自の手法を用いて解析を行い、その振動特性を明らかにした。本論文はこれらの成果をまとめたもので、全編7章よりなる。

第1章は序論であり、従来の研究を概括し、本研究の目的および内容について説明している。

第2章では二段段付片持りの自由横振動を、回転慣性、せん断変形の影響をも考慮した修正理論を用いて解析している。これより厚さ比あるいは幅比の変化が固有振動数、振動モードに与える影響を詳細に説明し、かつ古典理論によって得られる結果の誤差を明らかにしている。段付部材の設計上極めて有用な資料を提供したものと評価される。

第3章では幅の狭い溝付はりの自由横振動を、はり理論の適用可能な部分には伝達マトリックス法を、断面急変部には有限要素法を適用する組合せ形式の手法を導入して解析し、これを長方形断面の溝付はりに適用して、溝形状の固有振動数に及ぼす影響を究明している。さらに著者は上記溝付はりの振動実験を行い、実験結果と理論解とはよく一致することを明らかにし、本解析法の妥当性を明確にしている。

第4章では厚さが一定で長さ比および幅比の変化する二段段付長方形片持板の自由振動を有限要素法を用いて解析し、かつ実験結果とも対比している。

さて、はり両端の軸方向変位が拘束される場合、発生する軸力のため、はりの振動は必然的に非線形性となる。

第5章ではこのような段付はりの非線形振動を解析する手段として、伝達マトリックス法と調和バランス法とを併用する新しい方法を考案し、本解法を三部分からなる対称二段段付はり、両端単純支持および固定の二例に適用して、振幅と固有振動数の関係すなわち脊骨曲線についての詳細な計算結果を求めている。さらにこれらの結果をガレルキン法および逐次数値積分法による結果と比較してその差異を論じ、かつ実験をも行い、本解法による結果の妥当性を確認している。これらは貴重な成果である。

第6章では付加質量を有する段付はりの非線形横振動を重力を考慮して解析し、固有振動数、振動モードに及ぼすはり自重の影響を解明している。

第7章は結論である。

以上要するに、本論文は段付はりおよび板の線形および非線形横振動を詳細に解明し、振動特性に及ぼす段付部の影響を明らかにしたものであって、振動工学並びに機械工学に寄与するところが少なくない。

よって、本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。